

Θεωρία Αποφάσεων Bayes

Σάββατο

10:00 - ...

Μάθημα.

Παράδειγμα 6 (προηγούμενο μάθημα)Έστω $X \sim \text{Exp}(\theta)$ και $f(\theta) = 1, \theta > 0$ $f(x|\theta) = \theta \cdot e^{-\theta x}, \theta > 0$ Εάν $L(\theta, d) = |\theta - d|$, να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ .Πιθανόν να είναι λάθοςΛΥΣΗ

✓ Γάμμα Κατανομή

Θα έχουμε $f(\theta|x) \propto f(\theta) \cdot \theta \cdot e^{-\theta \cdot x} = 1 \cdot \theta \cdot e^{-\theta \cdot x} = \theta \cdot e^{-\theta \cdot x}, \theta > 0$ Θέλουμε να εντοπίσουμε το d^* : $R(f, d^*) = E_{\theta}(R(\theta, d^*)) = E_{\theta}(E_{x|\theta}(L(\theta, d^*)))$ η ποσότητα αυτή να

ελαχιστοποιείται.

Βάση του Πορίσματος 2 του γνωστού μας θεωρήματος, γνωρίζουμε ότι αυτό θα συμβεί (η ελαχιστοποίηση) όταν το d^* είναι η διαμέσος της θ/x .Δεδομένου ότι $\theta/x \sim \text{Exp}(\theta)$ θα έχουμε ότι:

$$\int_0^{d^*} \theta \cdot e^{-\theta x} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{αφού για τη διαμέσο ισχύει: } \int_0^{d^*} f(\theta/x) d\theta = \int_{d^*}^{+\infty} f(\theta/x) d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Επομένως θα είναι: } \left[-e^{-\theta x} \right]_{x=0}^{x=d^*} \Rightarrow -e^{-\theta d^*} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$e^{-\theta d^*} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\theta d^* = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \theta d^* = \ln 2 \Rightarrow \boxed{d^* = \frac{\ln 2}{\theta}}$$

Ορισμός: Ένας εκτιμητής d^* ονομάζεται minimax όταν

$$\max_{\theta} R(\theta, d^*) \leq \max_{\theta} R(\theta, d), \forall d \in \mathcal{D},$$
 δηλ. ελαχιστοποιεί τη μέγιστη ζημία.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{D}$ από πληθυσμό με σππ ή σπ $f(x|\theta)$ με εκ των προτέρων $\pi(\theta)$. Αν d^* είναι ο εκτιμητής Bayes της $g(\theta)$ και $R(g|\theta, d^*)$ είναι σταθερή, τότε: d^* minimax εκτιμητής.

Αποδ

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το εν λόγω ΘΕΩΡΗΜΑ δεν αποτελεί τρόπο εντοπισμού minimax εκτιμητή, αλλά, ελέγχει εάν ένας εκτιμητής Bayes είναι και minimax.

Θέλουμε νδο $d^* = \text{minimax}$ (όπου $\theta = g(\theta)$)

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\max_{\theta} R(\theta, d^*) \leq \max_{\theta} R(\theta, d) \forall d$.

Γνωρίζουμε ότι $\max_{\theta} R(\theta, d^*) = R(\theta, d^*) = c = \text{σταθερά}$, επομένως θα είναι

$$\max_{\theta} R(\theta, d^*) = c = \int c \cdot f(\theta) d\theta = E_{\theta}(R(\theta, d^*)) \stackrel{①}{=} R(f, d^*) \leq R(f, d) =$$

$$= \int R(\theta, d) f(\theta) d\theta \leq \int \max_{\theta} R(\theta, d) f(\theta) d\theta = \max_{\theta} R(\theta, d) \underbrace{\int f(\theta) d\theta}_{=1} = \max_{\theta} R(\theta, d)$$

① ο d^* εκτιμητής Bayes, επομένως

$$R(f, d^*) \leq R(f, d)$$

$$\text{και } E_{\theta} R(\theta, d^*) = \int R(\theta, d^*) f(\theta) d\theta = \int c \cdot f(\theta) d\theta.$$

Επομένως αποδείξαμε το ζητούμενο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Εάν ζητείται να εντοπισθεί τότε ένας εκτιμητής Bayes είναι minimax αρκεί να εφετάζεται, τότε η ποσότητα $R(g|\theta, d^*)$ είναι σταθερή.

Άσκηση 1

Έστω ΤΣ $X_1, \dots, X_n$ από $B(1, \theta)$ με $f(x_i | \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$ $x_i = 0, 1, \dots$
 με εκ των προτέρων $J(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$, $0 < \theta < 1$

Εάν ως ΣΑ χρησιμοποιηθεί το τετραχ σφάλμα, να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ και να εξεταστεί ποτέ είναι minimax.

Λύση $J(\theta | x) \propto J(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} \quad (*)$

$$J(\theta | x) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \cdot \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}}{\int \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} d\theta}$$

$(*) \theta^{\alpha+\sum x_i-1} (1-\theta)^{\beta+n-\sum x_i-1}$. Επομένως προκύπτει:

$$J(\theta | x) = \frac{\theta^{\alpha^*-1} (1-\theta)^{\beta^*-1}}{B(\alpha^*, \beta^*)} \quad \text{με } \alpha^* = \alpha + \sum x_i, \beta^* = \beta + n - \sum x_i$$

δηλ $\theta | x \sim \text{Beta}(\alpha^*, \beta^*) \Rightarrow \text{Beta}(\alpha + \sum x_i, \beta + n - \sum x_i)$

Επίσης, βάσει του Πορίσματος 1 του Θεωρήματος θα είναι:

$$\boxed{d^* = E_{\theta | x}(\theta) = \frac{\alpha^*}{\alpha^* + \beta^*} = \frac{\alpha + \sum x_i}{\alpha + \beta + n}}$$

Θα έχουμε ότι: $R(\theta, d^*) = E_{x | \theta} (L(\theta, d^*)) = E_{x | \theta} [(d^* - \theta)^2]$

$$= \text{Var}(d^*) + (E(d^*) - \theta)^2 =$$

$$= \text{Var} \left(\frac{\alpha + \sum x_i}{\alpha + \beta + n} \right) + \left[E \left(\left(\frac{\alpha + \sum x_i}{\alpha + \beta + n} \right) - \theta \right)^2 \right] = \frac{n \overset{\theta(1-\theta)}{\text{Var}(x_i)}}{(\alpha + \beta + n)^2} + \left[\frac{\overset{\theta}{\alpha + n E(x_i)}}{\alpha + \beta + n} - \theta \right]^2$$

$$= \frac{n \theta (1-\theta)}{(\alpha + \beta + n)^2} + \left[\frac{\alpha + n \theta}{\alpha + \beta + n} - \theta \right]^2 = \frac{n \theta - n \theta^2}{(\alpha + \beta + n)^2} + \left(\frac{(\alpha + n \theta - \alpha \theta - \beta \theta - n \theta)^2}{(\alpha + \beta + n)^2} \right)$$

$$= \frac{n \theta - n \theta^2}{(\alpha + \beta + n)^2} + \frac{\alpha^2 - 2\alpha(\alpha + \beta)\theta + (\alpha + \beta)^2 \theta^2}{(\alpha + \beta + n)^2}$$

$$= \frac{n \theta - n \theta^2 + \alpha^2 - 2\alpha \theta (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 \theta^2}{(\alpha + \beta + n)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Επομένως για να είναι σταθερή η συν/ση κινδύνου προς το θ θα πρέπει

$$\left. \begin{array}{l} n = (\alpha + \beta)^2 \\ n = 2\alpha(\alpha + \beta) \end{array} \right\} \xrightarrow{\alpha, \beta > 0} \alpha + \beta = \sqrt{n} \Rightarrow n = 2\alpha\sqrt{n} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

οπότε αν $\theta \sim \text{Beta}(\frac{\sqrt{n}}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2})$

Τότε ως εκτιμητής Bayes είναι και minimax.

Άσκηση 2

Έστω τ.δ $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $B(1, \theta)$ με $f(x_i/\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$ $x_i = 0, 1$

και $f(\theta) = 1, 0 < \theta < 1$, δηλ. $U(0, 1)$

$L(\theta, d) = \frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)}$ να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ και να

εξεταστεί τότε είναι minimax.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $f(\theta) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) = f(\theta) \prod_{i=1}^n \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$

$$= 1 \cdot \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} \quad 0 < \theta < 1$$

$\theta/x \sim \text{Beta}(\alpha^*, \beta^*)$

Κατανομή $\text{Beta}(\alpha^*, \beta^*)$,

όπου $\alpha^* = \sum x_i + 1$

$\beta^* = n - \sum x_i + 1$

Επομένως $\theta/x \sim \text{Beta}(\sum x_i + 1, n - \sum x_i + 1)$

Για να υπολογισθεί ο εκτιμητής Bayes της θ , βάσει του θεωρήματος αρκεί να εντοπιστεί το $\min E_{\theta/x}(L(\theta, d))$

$$\text{Θα είναι } E_{\theta/x}(L(\theta, d)) = \int_0^1 \frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} f(\theta/x) d\theta = \int_0^1 \frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} f(\theta/x) d\theta$$

Επομένως παραγωγίζοντας ως προς d και εξισώνοντας με το μηδέν

$$\text{Θα είναι: } 2 \int_0^1 \frac{d-\theta}{\theta(1-\theta)} f(\theta/x) d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$d \int_0^1 \frac{1}{\theta(1-\theta)} f(\theta/x) d\theta = \int_0^1 \frac{\theta}{\theta(1-\theta)} f(\theta/x) d\theta \Rightarrow d E_{\theta/x}\left(\frac{1}{\theta(1-\theta)}\right) = E_{\theta/x}\left(\frac{1}{1-\theta}\right)$$

$$\Rightarrow d E_{\theta|X} \left(\frac{1}{\theta(1-\theta)} \right) = E_{\theta|X} \left(\frac{1}{1-\theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } E_{\theta|X} \left(\frac{1}{1-\theta} \right) &= E_{\theta|X} (1-\theta)^{-1} = \int_0^1 \frac{\theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i-1}}{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i-1)} d\theta \\ &= \frac{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i)}{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i-1)} \int_0^1 \overset{(1)}{\theta^n} d\theta \quad \text{με κατανομή } \text{Beta}(\sum x_i+1, n-\sum x_i) \\ &= \frac{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i)}{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i-1)} \end{aligned}$$

$$E_{\theta|X} \left(\frac{1}{\theta(1-\theta)} \right) = E_{\theta|X} \left[\theta^{-1} (1-\theta)^{-1} \right] = \int_0^1 \frac{\theta^{\sum x_i-1} (1-\theta)^{n-\sum x_i-1}}{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i+1)} d\theta$$

$$\frac{B(\sum x_i, n-\sum x_i)}{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i+1)} \int_0^1 \overset{(1)}{\theta^n} d\theta = \frac{B(\sum x_i, n-\sum x_i)}{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i+1)}$$

$$\text{Οπότε θα είναι } d^* = \frac{B(\sum x_i+1, n-\sum x_i)}{B(\sum x_i, n-\sum x_i+1)}$$

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \dots \quad \frac{\Gamma(\sum x_i+1)\Gamma(n-\sum x_i)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\sum x_i+1)\Gamma(n)}{\Gamma(\sum x_i)\Gamma(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ \text{οπότε} &\rightarrow \boxed{d^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ο εκτιμητής Bayes είναι συνλση της επαφούς στατιστικής συνλσης (δηλ $\sum x_i$), δηλ. περιέχει όλη την πληροφορία ~~για~~ τη διαθέσιμη από το δείγμα.

Παραίτηται θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 R(\theta, d^*) &= E_{X|\theta} [L(\theta, d^*)] = E_{X|\theta} \left[\frac{(d^* - \theta)^2}{\theta(1-\theta)} \right] = \\
 &= E_{X|\theta} \left[\frac{\left(\frac{\sum x_i}{n} - \theta \right)^2}{\theta(1-\theta)} \right] = \frac{1}{\theta(1-\theta)} E_{X|\theta} \left(\frac{\sum x_i}{n} - \theta \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left\{ \text{Var} \left(\frac{\sum x_i}{n} \right) + \left[E \left(\frac{\sum x_i}{n} \right) - \theta \right]^2 \right\} = \\
 &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left[\frac{1}{n^2} n \text{Var}(x_i) + \left(n \frac{E x_i}{n} - \theta \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \cdot \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \frac{1}{n} = \text{σταθερή ως προς } \theta.
 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε minimax εκτιμητή.

Άσκηση 3

Έστω τ.μ. $X \sim B(n, \theta)$, δηλ. $f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$ $x=0, 1, \dots, n$
 και $f(\theta) = 1$, $0 < \theta < 1$, $U(0, 1)$.

- 1) Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ και να εξεταστεί αν είναι minimax
- 2) Να υπολογισθεί η συνολική κίνδυνος Bayes. Σύνολο απώλειας του T.S.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $f(\theta) f(x|\theta) = 1 \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$, $0 < \theta < 1$

οπότε μπορεί να υποτεθεί ότι:

$\theta|x \sim \text{Beta}(x+1, n-x+1)$ και επομένως $d^* = E_{\theta|x}(\theta) = \frac{x+1}{x+1+n-x+1} = \frac{x+1}{n+2}$

$$\Rightarrow d^* = \frac{x+1}{n+2}$$

Παρατηρηθεί, θα είναι:

$$R(\theta, d^*) = E_{x|\theta} (L(\theta, d^*)) = E_{x|\theta} \left[\frac{x+1}{n+2} - \theta \right]^2 = \text{Var} \left(\frac{x+1}{n+2} \right) + \left[E \left(\frac{x+1}{n+2} \right) - \theta \right]^2$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \underset{n\theta(1-\theta)}{\text{Var}(x)} + \left[\underset{n\theta}{\frac{1}{n+2}} (E(x)+1) - \theta \right]^2 =$$

$$= \frac{n\theta - n\theta^2}{(n+2)^2} + \frac{(n\theta + 1 - n\theta - 2\theta)^2}{(n+2)^2} = \frac{n\theta - n\theta^2 + (1-2\theta)^2}{(n+2)^2} \Rightarrow$$

$$R(\theta, d^*) = \frac{n\theta - n\theta^2 + 1 - 4\theta + 4\theta^2}{(n+2)^2} = \frac{(4-n)\theta^2 + (n-4)\theta + 1}{(n+2)^2}$$

Αν $n=4$ τότε ο εκτιμητής Bayes είναι και minimax.

(Διότι $R(\theta, d^*) = \text{σταθερό ως προς } \theta$)

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική κίνδυνο Bayes, δηλ την

$$R(f, d^*) = E_{\theta} (R(\theta, d^*)) = E_{\theta} \left(\frac{(4-n)\theta^2 + (n-4)\theta + 1}{(n+2)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \left[(4-n) E_{\theta}(\theta^2) + (n-4) E_{\theta}(\theta) + 1 \right]$$

$$\text{Όπως } E_{\theta}(\theta^2) = \int_0^1 \theta^2 f(\theta) d\theta = \int_0^1 \theta^2 d\theta = \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{και } E_{\theta}(\theta) = \int_0^1 \theta f(\theta) d\theta = \int_0^1 \theta d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Οπότε θα είναι

$$R(f, d^*) = \frac{1}{(n+2)^2} \left[(4-n) \frac{1}{3} + (n-4) \frac{1}{2} + 1 \right]$$

$$\Rightarrow R(f, d^*) = \frac{1}{(n+2)^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{n}{6} \right)$$